



SESSION de rattrapage  
Septembre 2001  
Série S  
Enseignement obligatoire et de spécialité  
Sujet : national

## MATHEMATIQUES

### Exercice 1 : probabilités (4 points)

Les résultats seront donnés à  $10^{-3}$  près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est de 0,4.

Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est de 0,2.

1. On note :

- $A_1$  l'événement « la personne est absente lors du premier appel » ;
- $R_1$  l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de  $R_1$ .

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est de 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2. Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- $A_2$  l'événement « la personne est absente lors du second appel »;
- $R_2$  l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel »;
- $R$  l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de  $R$  est de 0,176. (on pourra utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a acceptée de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter.

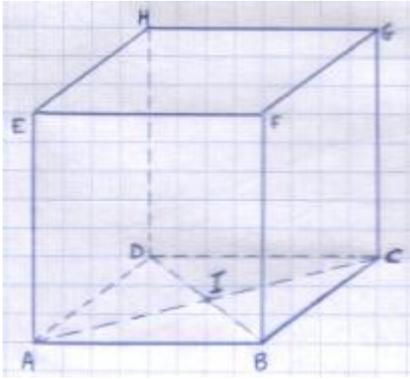
Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

### Exercice 2 : géométrie dans l'espace (5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthogonal direct. ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I.

(Aucune figure n'est demandée sur la copie).



1.
  - a) Déterminer  $\vec{BC} \wedge \vec{BA}$ .
  - b) En déduire l'ensemble E des points M de l'espace tels que :  $(\vec{BC} \wedge \vec{BA}) \wedge \vec{BM} = \vec{0}$
  - c) Déterminer l'ensemble F des points M tels que :  $(\vec{BC} \wedge \vec{BA}) \cdot \vec{BM} = 0$
2. On appelle P le barycentre du système { A, 2 ; C, -1 }.
  - a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.
  - b) Soit G l'ensemble des points M de l'espace tels que :  $\|2 \vec{MA} - \vec{MC}\| = \|-\vec{MA} + 2 \vec{MB} - \vec{MC}\|$   
déterminer l'ensemble G.  
Montrer que le point A appartient à l'ensemble G.
  - c) Soit H l'ensemble des points M de l'espace tels que :  $\|8 \vec{MA} - 4 \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|$   
Déterminer l'ensemble H.

**Exercice 2 (enseignement de spécialité) : géométrie plane et nombre complexe (5 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est de 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1.
  - a) Donner la formule exponentielle de c et la formule algébrique de d.
  - b) Représenter les points A, B, C et D.
  - c) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle  $\theta$  et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation  $\phi$  qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle

$$\text{que : } Z' = e^{(-i\frac{2\pi}{3})} \bar{Z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pour toute droite  $\delta$  du plan, on notera  $\sigma_\delta$  la symétrie orthogonale d'axe  $\delta$ .

- a) Soit r la transformation qui à tout point  $M_1$  d'affixe  $Z_1$  associe le point  $M'_1$  d'affixe  $Z'_1$  telle que :

$$Z'_1 = e^{(-i\frac{2\pi}{3})} Z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

- b) En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle  $(\vec{AO}, \vec{AB})$ , puis déterminer la droite  $\Delta$  telle que :  $r = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{(AO)}$ .
- c) Montrer que  $\varphi = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{(AO)}$ . En déduire la nature de  $\varphi$ .

### Problème : analyse (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$ .

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$ .
- Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x + \sin x$
  - En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $2 + \cos x + \sin x > 0$ .
  - Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^{1-x} \leq 3 e^{1-x}$ .
  - En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Montrer que sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$ .
  - Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
- Représenter la courbe  $C$  sur  $[0; 4]$ .

#### Partie B

On veut calculer l'aire,  $A$ , exprimée en unité d'aire, du domaine limité par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

- Montrer que :  $A = 2e - 2 + \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$
- On pose :  $I = \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$  et  $J = \int_0^1 \sin t e^{1-t} dt$ .
  - A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :  $I = -\cos 1 + e$  et  $J = -\sin 1 + I$ .
  - En déduire la valeur de  $I$ .
- Déterminer la valeur exacte de  $A$  en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de  $A$  à  $10^2$  près par défaut.

#### Partie C

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ .

- Montrer que la fonction  $h$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .
  - Calculer la primitive  $H$  de la fonction  $h$ , qui prend en 0 la valeur  $(1 + \ln 3)$ .
- Déterminer  $\ln(f(x))$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
  - Étudier le sens de variation de la fonction  $H$ .
  - Déterminer le tableau de variation de la fonction  $H$ .
- On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ . (On ne demande pas de représenter  $\Gamma$ ). On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = -x + 1$ .

- a) Étudier la position relative de  $\Gamma$  et  $\Delta$ .
  - b) Déterminer les abscisses des points communs à  $\Gamma$  et  $\Delta$ .
- 4.
- a) Établir une équation de la tangente  $T$  à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0.
  - b) Étudier la position relative de  $\Gamma$  et  $T$ .
5. Montrer que la courbe  $\Gamma$  est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera les équations.